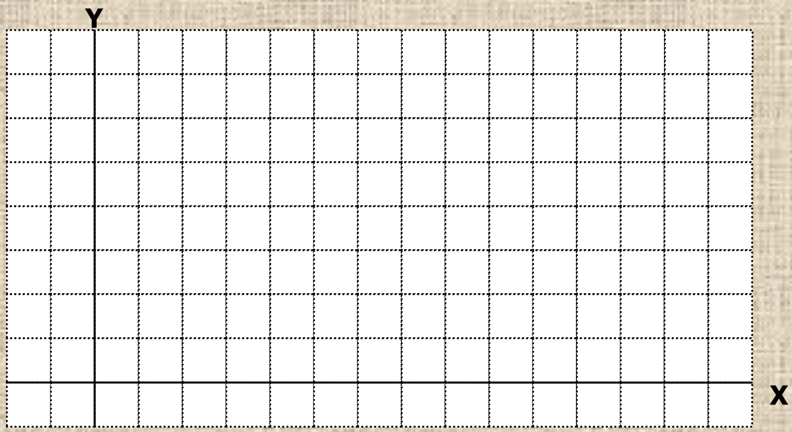
GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

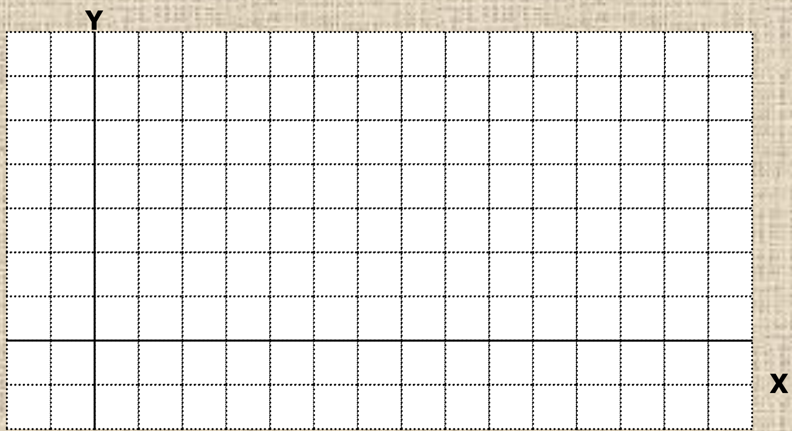
ÍNDICE

1. PRESENTACIÓN DEL TEMA

• Dibuja los puntos de coordenada P(3, 2) y Q(15, 8). Halla las coordenadas de su punto medio y dibújalo.



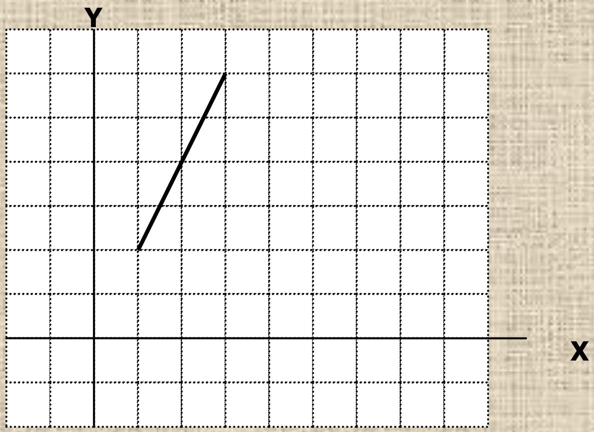
• Dibuja los puntos de coordenada P(1, 2) y Q(10, 8). Halla las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales y dibújalos.



• Un cuadrado tiene por lado el segmento de vértices: A(1, 2) y B(3, 6)

a) Determina su área.

b) Determina sus otros dos vértices.



2. PUNTOS Y VECTORES EN EL PLANO

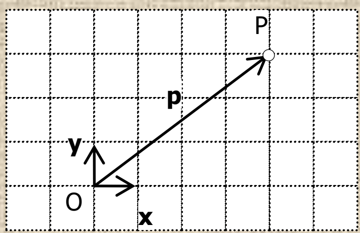
Los dos objetos básicos de la geometría son los puntos y los vectores. Ambos objetos tienen una relación elemental. Los puntos nos dan situación y los vectores direcciones.

Un sistema de referencia viene determinado por un punto fijo O y un par de vectores **x** e **y** que forman una base.

R = {O, **x**, **y**}

Se llama sistema de referencia ortonormal al que la base es ortonormal. Éste será el habitual.

Se llama vector de posición de un punto P al vector que va de OP. Las coordenadas del punto son las del vector de posición.

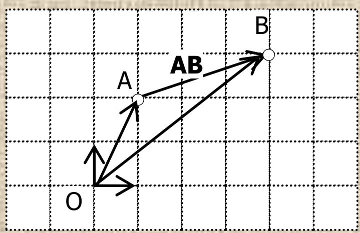


VECTOR QUE UNE DOS PUNTOS

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

De aquí deducimos las coordenadas del vector que une los puntos A y B.

Hacer un dibujo también que ilustre el juego vectorial.



Ej: Hallar el vector que va de P a Q siendo P(-5, 3) y Q(7, 1)

PUNTOS ALINEADOS

Tres puntos A, B y C estarán alineados si los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son l.d. Por lo tanto si sus coordenadas son proporcionales.

Ej: Determinar si los puntos A(2, -1); B(6, 1) y C(8,2) están alineados.

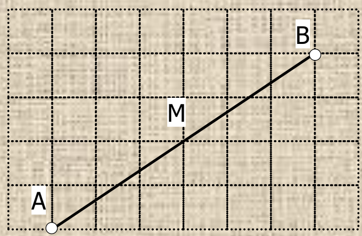
Ej: Hallar 'k' para que estén alineados P(1, 4); Q(5, -2) y R(6, k)

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO

El punto medio de dos puntos A y B se deduce fácilmente que tiene por coordenadas:

$$M = \left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right)$$

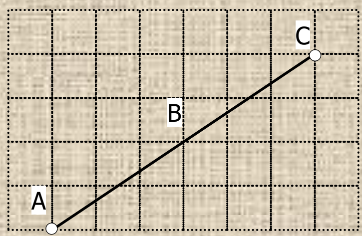
División en partes iguales. Hacerlo para división en tres partes iguales.



Ej: Hallar el punto medio de A(-5, 2) y B(7, -4)

SIMÉTRICO DE UN PUNTO RESPECTO DE OTRO

El simétrico de A respecto de P es el punto A' que cumple que B es punto medio de AA'



Ej: Hallar el punto simétrico de A(7, 4) respecto de P(3, -11)

3. ECUACIONES DE LA RECTA

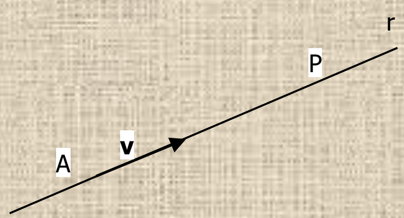
Una recta en el plano se puede identificar con un punto y una dirección. Es decir, mediante un punto A y un vector **v**.

La recta es el conjunto de puntos que están alineados con A según la dirección de **v**.

$$r = \left\{ P(x, y) \,/\, \vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{v} \right\}$$

ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA

$$\vec{p} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$$



P: Punto genérico
t: Parámetro.
$\vec{v}$: Vector director.
A: Punto inicial.

Si esto lo expresamos en coordenadas tendríamos que:

P(x, y), A(a_1, a_2) y $\vec{v}(v_1, v_2)$	**Ecuación vectorial** (x, y) = (a_1, a_2) + t (v_1, v_2)

Ejemplo

Hallar la ecuación vectorial de la recta que pasa por A(2, 3) y tiene de vector director **v**(4, 7). Dar tres puntos que pertenezcan a la recta

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(1, 4) y B(3, 6)

ECUACIONES PARAMÉTRICAS

De la ecuación vectorial, pasando a coordenadas deducimos las paramétricas

(x, y) = (a_1, a_2) + t (v_1, v_2)

Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 \cdot t \\ y = a_2 + v_2 \cdot t \end{cases}$$

Ejemplo

¿Cuáles son las paramétricas de la recta definida por A(5, 6) y **v**(1, –2)? Dar dos puntos de la recta

Ejemplo

De la siguiente recta decir un punto y un vector director

$$\begin{cases} x = 6 - t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$$

Ejemplo

Para la recta anterior completar la siguiente tabla:

x	1	2	3	4
y				

ECUACIONES CONTINUA Y GENERAL O IMPLÍCITA

Las ecuaciones anteriores definen la recta en función de un parámetro t, por eso se llaman paramétricas.

Las ecuaciones que vamos a obtener ahora buscan la relación directa entre x e y; es decir, sin mediar un parámetro.

Despejando *t* en las paramétricas e igualando obtenemos:

$$\begin{cases} x = a_1 + v_1 \cdot t & \rightarrow & t = \dfrac{x - a_1}{v_1} \\ y = a_2 + v_2 \cdot t & \rightarrow & t = \dfrac{y - a_2}{v_2} \end{cases}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación continua de la recta definida por A(2, 1) y **v**(–3, 4)

Si en la ecuación continua multiplicamos en cruz y pasamos todo al primer miembro tenemos:

$$v_2(x - a_1) = v_1(y - a_2)$$
$$v_2x - v_1y + v_1a_2 - v_2a_1 = 0$$

Ecuación general:
Ax + By + C = 0
A = v_2; B = $-v_1$

Ejemplo

Hallar la ecuación general de la recta del ejemplo anterior

Ejemplo

Hallar la ecuación general de r: A(5, 0) y **v**(1, –3)

Ejemplo

De la recta x + 2y – 3 = 0 dar un vector director y un punto por el que pasa.

Ejemplo

Ecuación general de r: A(2, 3) y **v**(1, 0)

ECUACIÓN EXPLÍCITA

La ecuación general recibe también el nombre de implícita porque la relación entre *x* e *y* no es directa.

Por ejemplo, 3x + y – 8 = 0

Se llama **ecuación explícita** a la que tiene *y* despejada.

En el ejemplo anterior, y = –3x + 8

En general,

Ecuación explícita

y = m x + n

m: pendiente
n: ordenada en el origen

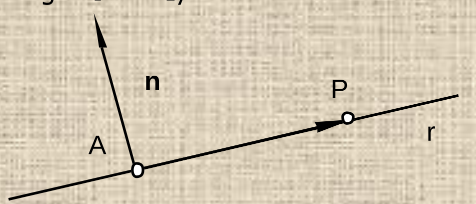
VECTOR NORMAL O PERPENDICULAR A UNA RECTA

$v_2x - v_1y + C = 0$. *Luego el vector* $(A, B) = (v_2, -v_1)$ *es perpendicular a ella.*

De la ecuación general deducimos que otra interpretación de Ax + By + C = 0 es que A=n_1 y B=n_2

En este caso también determinan una recta un punto por el que pasa, A, y un vector perpendicular o normal, **n**(n_1,n_2).

Luego $n_1x + n_2y + C = 0$



$\overrightarrow{AP} \perp \mathbf{n}$

Ejemplo

Dar un vector normal a la recta r: $x + 2y - 10 = 0$. Dar también un vector director. Comprobar que son perpendiculares.

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por A(2, 3) y es perpendicular a **n**(3, 5)

Mediatriz

Se llama mediatriz de un segmento a la recta perpendicular por el punto medio del segmento.

Según eso dibujar y hallar la mediatriz del segmento AB donde A(2, 1) y B(4, 7)

Ejemplo

Dibujar y hallar la ecuación de la altura por A del triángulo de vértices:

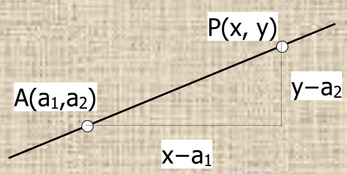
A(2, 1) ; B(0, 5) ; y C(–3, 0)

PENDIENTE DE UNA RECTA

La pendiente de una recta coincide con la de su vector director. Luego la pendiente de una recta $m = \frac{v_2}{v_1}$. Dibujo. También sabemos que es la tangente del ángulo que forma con la horizontal.

Otra forma de definir una recta es mediante un punto A(a_1, a_2) y una pendiente m.

Los puntos de la recta serán tales que el vector $\overrightarrow{AP}$ tenga de pendiente m.



Ecuación punto-pendiente:

$$\frac{y - a_2}{x - a_1} = m; y = a_2 + m(x - a_1)$$

Ejemplo

Hallar la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por A(2, 3) y m = 5

De la ecuación anterior fácilmente se puede pasar a la explícita. Basta despejar *y*.

Ver la relación con la ecuación explícita.

4. HAZ DE RECTAS

Optativo.

5. PARALELISMO Y PERPENDICULARIDAD

Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son l.d. o sus vectores normales son l.d. y, por lo tanto, sus coordenadas son proporcionales. También si sus pendientes son iguales.

Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores lo son o sus vectores normales lo son y por lo tanto su producto escalar es cero. También si sus pendientes cumplen la siguiente relación: $m \cdot m' = -1$

Dos vectores perpendiculares se caracterizan porque su producto escalar vale 0; es decir, **u** · **v** = 0. Por lo tanto $u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$. De aquí fácilmente deducimos que:

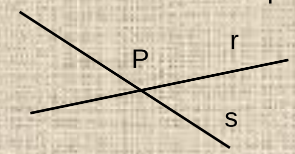
$\frac{u_2}{u_1} = -\frac{v_1}{v_2}$; es decir, $m' = \frac{-1}{m}$; o lo que es lo mismo $m \cdot m' = -1$

Esto me da una forma sencilla de conseguir una pendiente perpendicular a otra.

Poner algunos ejemplos en paramétricas, general y explícita. Del tipo hallar una paralela, perpendicular,… por el punto tal.

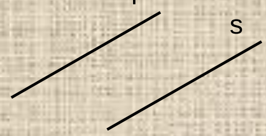
6. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

Dos rectas en el plano pueden ser:



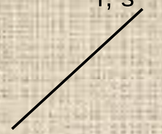
Secantes. Se cortan. Tienen un punto común

$r \cap s = P$



Paralelas. No tienen puntos comunes.

$r \cap s = \varnothing$



Coincidentes. Todos los puntos en común.

$r = s$

Si dos rectas tienen la misma dirección y un punto común entonces son coincidentes.

ESTUDIO POR ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Estudiar las posiciones relativas y hallar el punto de corte si lo tuvieren (hay que cambiar el parámetro en una de ellas). Para discriminar si son coincidentes basta ver si tienen un punto común y la misma dirección.

$r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - 6t \end{cases}$

$r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 - 3t \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x = 2t \\ y = 11 - 6t \end{cases}$

$r_1: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 3t \end{cases}$ $r_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 6 - 3t \end{cases}$

CARACTERIZACIÓN POR ECUACIONES GENERALES

Dos rectas:

$$Ax + By + C = 0$$

$$A'x + B'y + C' = 0$$

Secantes: $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$

Paralelas: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$

Coincidentes: $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$

Ejemplo

$r: 2x + y - 7 = 0$
$s: -x + y - 1 = 0$

Ejemplo

$8x - 4y + 6 = 0$
$4x - 2y + 9 = 0$

Ejemplo

$3x - 2y + 4 = 0$

$6x - 4y + 8 = 0$

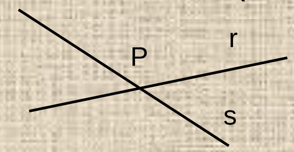
PUNTO DE CORTE DE DOS RECTAS

Para hallar el punto de corte de dos rectas secantes procederemos a resolver el sistema de ecuaciones que determinan.

OBSERVACIÓN SOBRE ECUACIONES

Si al resolver el sistema, tenemos:

1. Solución única. Se cortan.
2. Infinitas soluciones. $0 \cdot x = 0$. Una recta. Son coincidentes.
3. Ninguna solución. $0 \cdot x = k$. ($k \neq 0$). Son paralelas.



$r : Ax + By + C = 0$
$s : A'x + B'y + C' = 0$

Ejemplo

Hallar el punto de corte de las rectas:

$2x + y - 7 = 0$
$-x + y - 1 = 0$

Ejemplo

Resolver el sistema e interpretarlo

$8x - 4y + 6 = 0$
$2x - y + 3 = 0$

Ejemplo

Hacer lo mismo para el sistema

$x - y + 2 = 0$
$2x - 2y + 4 = 0$

Sistema paramétricas y general

Averiguar la posición relativa de r respecto de cada una de las otras rectas:

$r: 2x - 5y - 12 = 0$

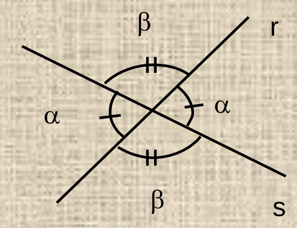
$s_1: \begin{cases} x = -11 + 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$

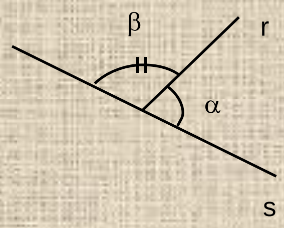
$s_2: \begin{cases} x = 6 + 5t \\ y = 2t \end{cases}$

$s_3: \begin{cases} x = 4 + 5t \\ y = 7 + 2t \end{cases}$

7. ANGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

Dos rectas que se cortan determinan cuatro ángulos iguales dos a dos. Se considera como ángulo que forman el menor. Es decir, el agudo. En el dibujo α



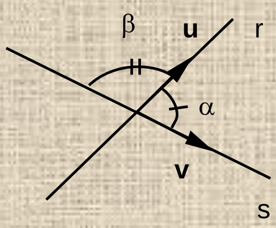


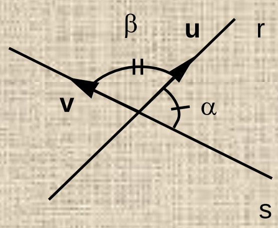
Estos ángulos son suplementarios entre si.

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

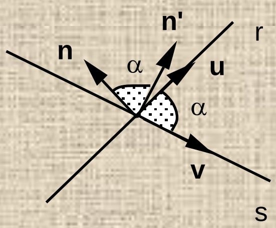
El ángulo que forman dos rectas coincide con el que forman sus vectores directores (o el suplementario)





$$\cos(r,s) = |\cos(\vec{u},\vec{v})| = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

Por otro lado, el ángulo que forman los vectores directores coincide con el ángulo que forman los vectores normales.



r : **n**
s : **n'**

$$\cos(r,s) = |\cos(\mathbf{n},\mathbf{n}')| = \left|\frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'}{|\mathbf{n}|.|\mathbf{n}'|}\right|$$

Ejemplo

¿Qué ángulo forman las rectas?

$$r_1: \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

$$r_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3t \end{cases}$$

$$r_3: \begin{cases} x = 7 + 4t \\ y = -2 - 2t \end{cases}$$

¿Y éstas?

r: $5x - y + 4 = 0$

s: $y = 7$

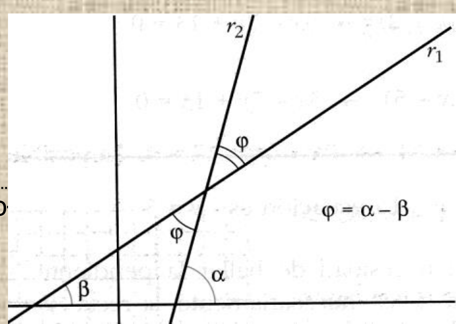
¿Qué ángulo forman las rectas?

r: 2x – y + 7 = 0

s: 3x + 2y – 5 = 0

ÁNGULO A PARTIR DE SUS PENDIENTES

Recordemos que la pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma con el eje OX. En



principio forma dos ángulos, podríamos tomar cualquiera de los dos puesto que en la resta que haremos luego la referencia es la misma para las dos rectas OX y luego corregimos la diferencia tomando el valor absoluto.

Dos rectas paralelas m=m'. En este caso el ángulo sería de 0º.

Dos rectas perpendiculares: m·m'=−1 según hemos visto antes. En este caso el ángulo sería de 90º.

Dos rectas en general:

$$\text{tg}\,\gamma = |\text{tg}(\beta - \alpha)| = \left|\frac{\text{tg}\,\beta - \text{tg}\,\alpha}{1 + \text{tg}\,\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}\right| = \left|\frac{m' - m}{1 + m \cdot m'}\right|$$

¿Qué ángulo forman las rectas?

$$y = 3x + 5,\quad y = -2x + 1$$

8. CÁLCULO DE DISTANCIAS

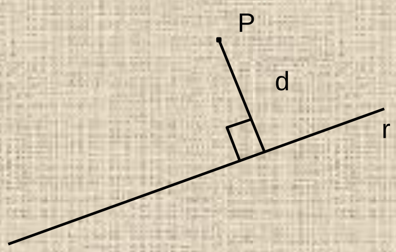
ENTRE DOS PUNTOS

El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$

Ejercicio:

Sea el triángulo de vértices: A(2, 3); B(–1, 6) y C(–4, 3) decir de que tipo es según el valor de sus lados y ángulos calculando los mismos.

PUNTO A UNA RECTA

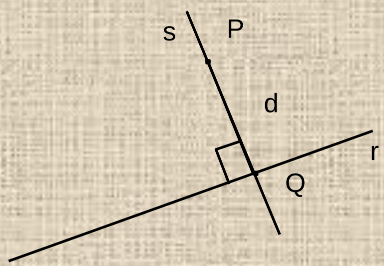


La distancia de un punto a una recta viene dada por la perpendicular.

r: Ax + By + C = 0

P(p_1, p_2)

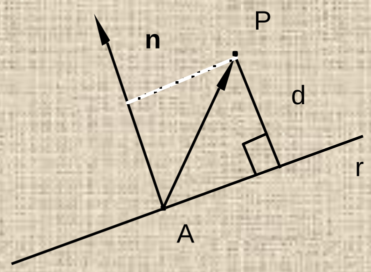
Primer método de cálculo:



Bastaría hallar la recta perpendicular a r pasando por P y después el punto de corte de ambas.

d = $|\overrightarrow{PQ}|$

Segundo método



Hallando la proyección del vector $\overrightarrow{AP}$ sobre $\vec{n}$

$$\text{pr } \mathbf{AP}\Big|_{\mathbf{n}} = \left|\frac{\mathbf{AP}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}\right|$$

Tercer método

Por la fórmula que se deduce del 2° método:

$$\text{pr } \mathbf{AP}\Big|_{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{AP}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d(P,r) = \left|\frac{Ap_1 + Bp_2 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto P(2, 3) a la recta r: –x + 3y + 8 = 0

Ejemplo

¿Cuál es el punto más cercano de la recta –3x + 2y + 6 = 0 al origen de coordenadas? Hallar la distancia del origen a dicha recta de las dos formas. Por los puntos y por la fórmula.

Ejemplo

Hallar la distancia de P(–1, 2) a la recta r: 2x – 3y = 0
La distancia negativa indica que el punto está del otro lado de la normal a la recta.

DISTANCIA ENTRE RECTAS PARALELAS

La que hay entre un punto de una de ellas y la otra.
Ejercicio.
Hallar la distancia entre las rectas de más abajo. Después hacer lo del cuadrado.
Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están sobre las rectas:

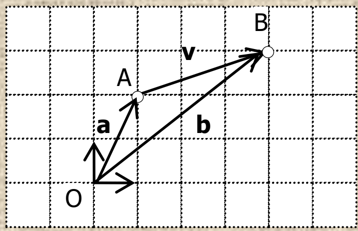
$$r\!: 2x - 3y + 4 = 0 \qquad s\!: 2x - 3y + 1 = 0$$

Calcula el área de dicho cuadrado.

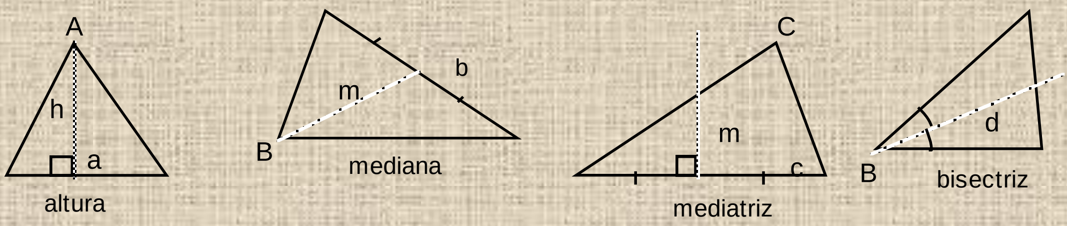
9. ANEXO

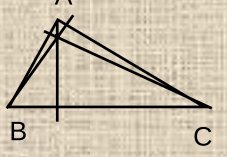
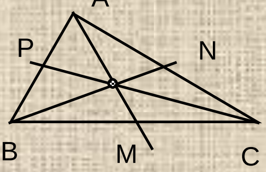
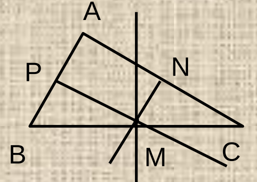
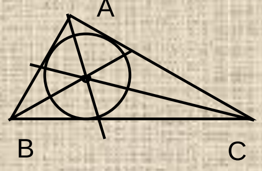
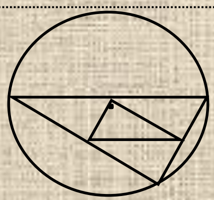
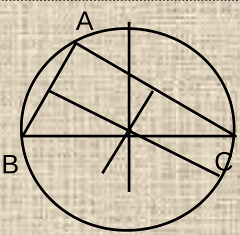
Traslación de un punto mediante un vector

$B = A + \vec{v}$ donde $\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}$



Elementos notables del triángulo



Perpendicular por un vértice a la base opuesta.	Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.	Perpendicular por el punto medio de un lado	Semirrecta que divide a un ángulo en dos partes iguales.
 Ortocentro	 Baricentro	 Circuncentro	 Incentro
	Centro de gravedad o masas del triángulo		Centro de la circunferencia inscrita.

Mediana que pasa por el vértice A

Basta hallar la recta que une AM. Siendo M el punto medio de BC.

Mediatriz por el lado AB

Basta hallar la perpendicular por el punto M, medio de AB. Nos vale como vector normal a dicha recta $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$

Altura por A

Basta hallar la perpendicular a BC por A. Se trata de hallar la recta que pasa por A y tiene de vector normal $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$.

Bisectriz por A

Lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas que definen los lados AB y AC.

Aquí hay que recordar cómo se resuelven las ecuaciones lineales con valor absoluto.

Ejemplo bueno

Hallar todos los elementos del triángulo:
A(−2, 1); B(0, −2) y C(4, 4)

10. EJERCICIOS Y PROBLEMAS

1. SISTEMA DE REFERENCIA EN EL PLANO

2. APLICACIONES DE LOS VECTORES

3. ECUACIONES DE LA RECTA

4. ECUACIONES CONTINUA Y GENERAL O IMPLÍCITA

5. ECUACIÓN EXPLÍCITA Y PUNTO-PENDIENTE

6. ECUACIÓN NORMAL DE UNA RECTA

1. Halla el punto simétrico de $P(2, 3)$ con respecto a la recta r: $3x - y + 5 = 0$.

$$P'\left(\frac{-14}{5}, \frac{23}{5}\right)$$

2. Halla la ecuación de la mediatriz del segmento que tiene como extremos los puntos de corte de la recta $3x + 4y - 12 = 0$ con los ejes de coordenadas.
(2 puntos)

3. Dados los puntos A(1, 3); B(−2, 5) y C(3, k)
a) Hallar el valor de 'k' para que estén alineados.
b) Hallar la pendiente y la ordenada en el origen de la recta que determinan.
c) Hallar la mediatriz del segmento AB.

4. Sean las rectas r: x – 2y + 8 = 0 y s: –2x + 4y –7 = 0
a) Decir cuál es su posición relativa en el plano.
b) Hallar la distancia entre ellas.
c) Dar la ecuación de una recta perpendicular a la primera que pase por el origen de coordenadas.
d) Hallar el punto más cercano de la recta 'r' al origen de coordenadas.

7. POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS EN EL PLANO

5. Responde a lo siguiente:
a) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta, *r,* que pasa por los puntos $P(2, -1)$ y $Q(3, 4)$.

b) Averigua la posición relativa de la recta obtenida en a) con la recta: $\boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{3} + \boldsymbol{t} \end{cases}$

6. Contesta:
a) Averigua la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \mathbf{2} - \mathbf{3}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y} = -\mathbf{1} + \mathbf{4}\boldsymbol{t} \end{cases}$$

b) Estudia la posición relativa de la recta anterior, r, con la recta $8x + 6y - 10 = 0$.

7. Responder a los siguientes apartados:

a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r, sabiendo que pasa por los puntos $A(2,2)$ y $B(1,-3)$.

b) Determina la posición relativa de la recta anterior, r, con la recta: $s:\begin{cases} x=2-3t \\ y=10-15t \end{cases}$

(2 puntos)

8. a) Halla las ecuaciones paramétricas de la recta r, sabiendo que pasa por los puntos $A(2, 2)$ y $B(1, -3)$.

b) Determina la posición relativa de la recta anterior, r, con la recta:

$$s:\begin{cases} x=2-3t \\ y=10-15t \end{cases}$$

9. a) Averigua la ecuación implícita de la recta cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r:\begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+4t \end{cases}$$

b) Estudia la posición relativa de la recta anterior, r, con la recta $8x+6y-10=0$.

8. PUNTO DE CORTE DE DOS RECTAS

9. ANGULO QUE FORMAN DOS RECTAS

10. Halla el ángulo formado por las rectas de ecuaciones:

$$\boldsymbol{r}:\begin{cases} \boldsymbol{x}=\mathbf{2}\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y}=\mathbf{1}+\boldsymbol{t} \end{cases} \qquad \boldsymbol{s}:\begin{cases} \boldsymbol{x}=\mathbf{1}-\boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{y}=\mathbf{2}+\boldsymbol{t} \end{cases}$$

11. Calcula el ángulo formado por las rectas: $y=-2x+3$ $\qquad y=4x+1$

SOL: $tg\,\alpha=\left|\dfrac{4-(-2)}{1+(-2)\cdot 4}\right|=\left|\dfrac{4+2}{1-8}\right|=\left|\dfrac{6}{-7}\right|=\dfrac{6}{7}=0{,}857 \quad\rightarrow\quad \alpha=40^\circ\,36'\,5''$

12. Halla el ángulo formado por estas rectas:

$$3x-y+2=0 \qquad x+4y+1=0$$

(1 punto)

13. Calcula el ángulo formado por las rectas:

$$y=-2x+3 \qquad y=4x+1$$

14. Calcula 'm' para que las rectas: mx+3y−2=0 y 2x+(m−1)y+2=0

a) Sean paralelas.

b) Sean perpendiculares.

c) Hallar el punto de corte en el último caso.

10. DISTANCIAS

15. Dados los puntos $P(0,-4)$, $Q(2,-5)$ y la recta r: $-3x+y+1=0$, halla la distancia:

a) Entre P y Q $\qquad$ b) De Q a r.

16. Dada la recta r: $-3x+4y-1=0$ y los puntos $A(2, 4)$ y $B(-1, 3)$, halla la distancia:

a) Entre *A* y *B*. b) De *B* a *r*.

(1 punto)

17. Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están sobre las rectas:

$$r: 2x - 3y + 4 = 0 \qquad s: 2x - 3y + 1 = 0$$

Calcula el área de dicho cuadrado.

11. ELEMENTOS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

18. Los vértices de un paralelogramo son: A(1, 2); B(5, 3); C(6, 5) y C(2, 4)

a) Demostrar que es un paralelogramo.

b) Halla las ecuaciones de las dos diagonales.

c) Hallar el punto de corte y comprobar que es el punto medio de las dos diagonales.

d) Hallar el ángulo que forman al cortarse.

19. Sea el triángulo de vértices: A(2, 3); B(–1, 6) y C(–4, 3) decir de que tipo es según el valor de sus lados y ángulos calculando los mismos.

20. Dado el triángulo A(3, 4); B(−1, 2) y C(3,−1), calcular:

a) La distancia de A a la recta que pasa por B y C.

b) Área del triángulo.

21. Sea el paralelogramo ABCD de vértices A(2, –3); B(5, 2) y C(4, 4).

a) Hallar el vértice D.

b) Hallar el valor de los lados del paralelogramo y de sus ángulos.

c) Demostrar que los vectores que forman sus diagonales coinciden, respectivamente, con la suma y resta de sus lados.

d) Hallar la superficie del paralelogramo.

22. Dado el triángulo de vértices A(2, 0); B(0, 1) y C(–3, –2) hallar:

a) La altura que parte de B.

b) La mediatriz de AB.

c) El punto de corte de ambas.